I - Définitions et premiers calculs

Définitions

- On appelle **fonction linéaire** de coefficient a toute fonction qui, à tout nombre noté x, associe le nombre $a \times x$ (c'est-à-dire $x \longmapsto a \times x$) où a est un nombre.
- On appelle **fonction affine** toute fonction qui, à tout nombre noté x, associe le nombre $a \times x + b$ (c'est-à-dire $x \longmapsto a \times x + b$) où a et b sont deux nombres.

Remarques :

- Une fonction linéaire est une fonction affine particulière (cas où $b = 0$).
  Les fonctions linéaires traduisent des **situations de proportionnalité**.
- Lorsque $a = 0$, la fonction est une **fonction constante** : à tout nombre x, elle associe le nombre b.

Propriétés

- Tout nombre admet **une unique image** par une fonction linéaire ou affine.
- Tout nombre admet **un unique antécédent** par une fonction linéaire ou affine non constante.

Exemple 1 :

Soit la fonction f linéaire telle que $f(x) = 3x$.

a. Calcule l'image de 5 par la fonction f.

b. Calcule l'antécédent de 27 par la fonction f.

a. $f(x) = 3x$	On remplace x par **5**.
$f(5) = 3 \times 5$	On calcule.
$f(5) = 15$	L'**image** de **5** par la fonction f est **15**.
b. $f(x) = 27$	On cherche le nombre x qui a pour **image 27**.
$3x = 27$	On résout.
$x = 9$	L'**antécédent** de **27** par f est donc **9**.

Exemple 2 :

Soit la fonction g affine telle que $g(x) = 7x - 4$.

a. Calcule l'image de -7 par la fonction g.

b. Calcule l'antécédent de 45 par la fonction g.

a. $g(x) = 7x - 4$	On remplace x par -7.
$g(-7) = 7 \times (-7) - 4$	On calcule.
$g(-7) = -53$	L'**image** de **-7** par la fonction g est **-53**.
b. $g(x) = 45$	On cherche le nombre x qui a pour **image 45**.
$7x - 4 = 45$	On résout.
$7x = 49$ càd $x = 7$	L'**antécédent** de **45** par g est donc **7**.

II - Détermination d'une fonction linéaire ou affine

Exemple 1 : Détermine la fonction linéaire f telle que $f(7) = 3$.

$f(x) = ax$	f est une fonction linéaire de coefficient a.
$f(7) = 7a$ et $f(7) = 3$	On remplace x par 7.
$7a = 3$	On obtient une équation que l'on résout.
$a = \frac{3}{7}$	f est donc la fonction définie par $f(x) = \frac{3}{7}x$.

Propriété

Pour toute fonction affine g de coefficient a, les accroissements des valeurs de $g(x)$ et de x sont proportionnels donc, pour tous nombres x_1 et x_2 distincts, $a = \dfrac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2}$.

Exemple 2 : Détermine la fonction affine g telle que $g(1) = 1$ et $g(2) = -2$.

Première méthode :

$g(x) = ax + b$	⟶	g est une fonction affine.
$g(1) = a + b = 1$	⟶	On remplace x par 1.
et $g(2) = 2a + b = -2$	⟶	On remplace x par 2.
Donc $\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = -2 \end{cases}$	⟶	On obtient un système de deux équations que l'on résout.
On obtient $a = -3$ et $b = 4$	⟶	g est donc la fonction définie par $g(x) = -3x + 4$.

Deuxième méthode :

$a = \dfrac{g(2) - g(1)}{2 - 1}$ $a = \dfrac{-2 - 1}{2 - 1} = \dfrac{-3}{1} = -3$ $g(x) = -3x + b$	⟶	On détermine le coefficient a en utilisant la propriété des accroissements.
	⟶	On remplace a par -3 dans l'expression de g.
$g(1) = 1 \times (-3) + b = 1$	⟶	On remplace x par 1.
$b = 4$	⟶	On résout l'équation pour déterminer b.
On obtient $a = -3$ et $b = 4$	⟶	g est donc la fonction définie par $g(x) = -3x + 4$.

III - Représentation graphique

Propriété

La représentation graphique d'une **fonction affine** $g : x \longmapsto a \times x + b$ est une **droite**.

Dans le cas d'une **fonction linéaire** ($b = 0$), cette **droite passe par l'origine** du repère et par le point de coordonnées (1 ; a).

Remarques :

- a s'appelle le **coefficient directeur** de la droite : il donne l'accroissement de $f(x)$ lorsque x augmente d'une unité.

- b s'appelle l'**ordonnée à l'origine** : $f(0) = b$. La droite passe par le point de coordonnées (0 ; b).

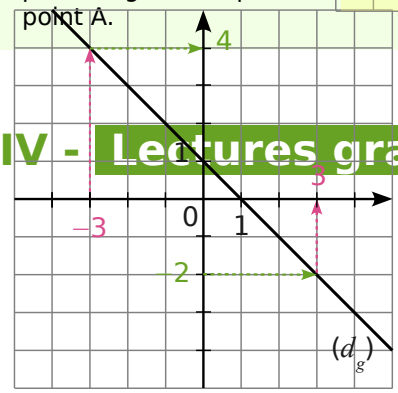
Exemple 1 : Représente graphiquement la fonction linéaire f définie par $f(x) = -0{,}5x$.

f est une fonction linéaire donc sa représentation graphique est une droite qui passe par l'origine du repère.

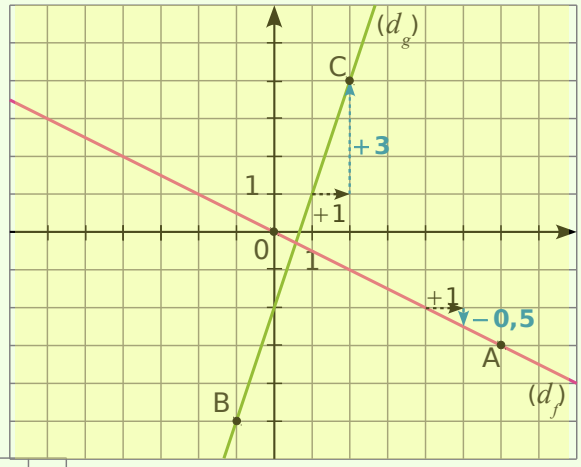
Pour tracer cette droite, il suffit de connaître les coordonnées d'un de ses points : on calcule l'image d'un nombre par la fonction f.

Par exemple : A(6 ; − 3).

On trace (d_f) qui passe par l'origine et par le point A.



Exemple 2 : Représente graphiquement la fonction affine g définie par $g : x \longmapsto 3x - 2$.



g est une fonction affine donc sa représentation graphique est une droite.

Pour tracer cette droite, il suffit de connaître les coordonnées de deux de ses points.

Par exemple :
B(− 1 ; − 5) et C(2 ; 4).

On trace (d_g) qui passe par les points B et C.

IV - Lectures graphiques

Exemple : Voici le graphique d'une fonction affine notée g. Détermine l'image de − 3 et l'antécédent de − 2 par g.

Pour lire l'image de − 3 :

L'**image** de **− 3** est l'**ordonnée** du point de la droite d'**abscisse − 3**.
L'image de − 3 par la fonction g est 4.

Pour lire l'antécédent de − 2 :

L'**antécédent** de **− 2** est l'**abscisse** du point de la droite d'**ordonnée − 2**.
L'antécédent de − 2 par la fonction g est 3.